Ein Beispiel für LhO

1. April 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Die Quadratwurzeln von Primzahlen sind irrational.

Theorie *Wurzel*
verwendet *Haupt*
Beginn

Die Quadratwurzel einer beliebigen Primzahl (einschließlich 2) ist irrational.

Satz *primwurzel-irrational*:
  nimmt *prim* $(p::nat)$ **an**
  zeigt *wurzel* $p \notin \mathbb{Q}$
Beweis
  wegen ‹*prim p*› **gilt** p: $1 < p$ **durch** (*Vereinfachung mit*: *prim-nat-def*)
  nimm *wurzel* $p \in \mathbb{Q}$ **an**
  dann erhalte $m\ n :: nat$ **wobei**
    n: $n \neq 0$ **und** *sqrt-rat*: $|wurzel\ p| = m\ /\ n$
  und *ggT*: $ggT\ m\ n = 1$ **durch** (*Regel Rat-betrag-nat-teilt-natE*)
  gilt *eq*: $m^2 = p * n^2$
  Beweis –
    wegen n **und** *sqrt-rat* **gilt** $m = |wurzel\ p| * n$ **durch** *Vereinfachung*
    dann gilt $m^2 = (wurzel\ p)^2 * n^2$
      durch (*Automatismen vereinfache mit*: *zweierpotenz-ist-quadrat*)
    weiter gilt $(wurzel\ p)^2 = p$ **durch** *Vereinfachung*

weiter gilt $\ldots * n^2 = p * n^2$ **durch** *Vereinfachung*
zusammengefasst zeige *?These* **..**
wzbw
gilt p *teilt* $m \wedge p$ *teilt* n
Beweis
wegen *eq* **gilt** p *teilt* m^2 **..**
samt ‹*prim p*› **zeige** p *teilt* m **durch** (*Regel prim-teilt-potenz-nat*)
dann erhalte k **wobei** $m = p * k$ **..**
samt *eq* **gilt** $p * n^2 = p^2 * k^2$ **durch** (*Automatismen vereinfache mit*: *zweierpotenz-ist-quadrat ac-simps*)
samt p **gilt** $n^2 = p * k^2$ **durch** (*Vereinfachung mit*: *zweierpotenz-ist-quadrat*)
dann gilt p *teilt* n^2 **..**
samt ‹*prim p*› **zeige** p *teilt* n **durch** (*Regel prim-teilt-potenz-nat*)
wzbw
dann gilt p *teilt ggT* m n **..**
samt *ggT* **gilt** p *teilt* 1 **durch** *Vereinfachung*
dann gilt $p \leq 1$ **durch** (*Vereinfachung mit*: *teilt-impliziert-kg*)
samt p **zeige** *Falsch* **durch** *Vereinfachung*
wzbw

Korollar *wurzel-2-nicht-rational*: *wurzel* $2 \notin \mathbb{Q}$
verwende *primwurzel-irrational*[**fuer** *2*] **durch** *Vereinfachung*

1.1 Veränderungen

Hier ist eine weitere Version des Hauptbeweises, die vorwiegend gerades Vorwärts-Schließen verwenden. Obwohl dies weniger einse Von-Open-Nach-Unten-Struktur ergibt, ist es vermutlich näher den Beweisen aus der Mathematik.

Satz
nimmt *prim* (p::*nat*) **an**
zeigt *wurzel* $p \notin \mathbb{Q}$
Beweis
wegen ‹*prim p*› **gilt** p: $1 < p$ **durch** (*Vereinfachung mit*: *prim-nat-def*)
nimm *wurzel* $p \in \mathbb{Q}$ **an**
dann erhalte m n :: *nat* **wobei**
n: $n \neq 0$ **und** *sqrt-rat*: $|$*wurzel* $p| = m \ / \ n$
und *ggT*: *ggT* m $n = 1$ **durch** (*Regel Rat-betrag-nat-teilt-natE*)
wegen n **und** *sqrt-rat* **gilt** $m = |$*wurzel* $p| * n$ **durch** *Vereinfachung*
dann gilt $m^2 = ($*wurzel* $p)^2 * n^2$
durch (*Automatismen vereinfache mit*: *zweierpotenz-ist-quadrat*)
weiter gilt $($*wurzel* $p)^2 = p$ **durch** *Vereinfachung*
weiter gilt $\ldots * n^2 = p * n^2$ **durch** *Vereinfachung*
zusammengefasst gilt *eq*: $m^2 = p * n^2$ **..**
dann gilt p *teilt* m^2 **..**
samt ‹*prim p*› **gilt** *teilt-m*: p *teilt* m **durch** (*Regel prim-teilt-potenz-nat*)
dann erhalte k **wobei** $m = p * k$ **..**
samt *eq* **gilt** $p * n^2 = p^2 * k^2$ **durch** (*Automatismen vereinfache mit*: *zweierpotenz-ist-quadrat*

ac-simps)
  samt *p* **gilt** $n^2 = p * k^2$ **durch** (*Vereinfachung mit*: *zweierpotenz-ist-quadrat*)
  dann gilt *p teilt* n^2 **..**
  samt ‹*prim p*› **gilt** *p teilt n* **durch** (*Regel prim-teilt-potenz-nat*)
  samt *teilt-m* **gilt** *p teilt ggT m n* **durch** (*Regel ggT-groesster-nat*)
  samt *ggT* **gilt** *p teilt 1* **durch** *Vereinfachung*
  dann gilt $p \leq 1$ **durch** (*Vereinfachung mit*: *teilt-impliziert-kg*)
  samt *p* **zeige** *Falsch* **durch** *Vereinfachung*
wzbw

Eine alte Kastanie, die eine Konsequenz der Irrationalität von 2 ist.

Lemma $\exists$ *a b*::*real*. $a \notin \mathbb{Q} \wedge b \notin \mathbb{Q} \wedge$ *a hoch b* $\in \mathbb{Q}$ (**is** *EX a b*. *?P a b*)
Beweis *cases*
  nimm *wurzel 2 hoch wurzel 2* $\in \mathbb{Q}$ **an**
  dann gilt *?P* (*wurzel 2*) (*wurzel 2*)
    durch (*metis wurzel-2-nicht-rational*)
  dann zeige *?These* **durch** *Explosion*
fertig
  nimm *1*: *wurzel 2 hoch wurzel 2* $\notin \mathbb{Q}$ **an**
  gilt (*wurzel 2 hoch wurzel 2*) *hoch wurzel 2* = *2*
    verwende *hoch-reele-potenz* [**fuer** - *2*]
   durch (*Vereinfachung mit*: *potenz-potenz zweierpotenz-ist-quadrat* [*symmetric*])
  dann gilt *?P* (*wurzel 2 hoch wurzel 2*) (*wurzel 2*)
    durch (*metis 1 Rats-number-of wurzel-2-nicht-rational*)
  dann zeige *?These* **durch** *Explosion*
wzbw

Ende

2 Drei-Teilt-N-Satz

Theorie *DreiTeilt*
verwendet *Haupt*
Beginn

2.1 Zusammenfassung

Dieses Schriftstück enthält einen Beweis des Drei-Teilt-N-Satzes, im Brunhilde/Rhein-Satzbeweisssytem formalisiert.

Satz: 3 teilt n genau dann, wenn 3 die Summe aller Ziffern in n teilt.

Formloser Beweis: Sei $n = \sum n_j * 10^j$ wobei n_j die $j$te niedrigstwertigste Ziffer der Dezimalschreibweise der Zahl n ist, und die Summe über alle Ziffern läuft. Dann ist

$$(n - \sum n_j) = \sum n_j * (10^j - 1)$$

Wir wissen, dass $\forall j\ 3|(10^j - 1)$ und damit $3|LHS$, weiter gilt

$$\forall n\ 3|n \Longleftrightarrow 3|\sum n_j$$

$\square$

2.2 Förmlicher Beweis

2.2.1 Ein paar Lemmata zu Summation

Wenn $A\ x$ für alle x durch a geteilt wird, dann teilt a jede Summe über Terme der Form $(A\ x)*(P\ x)$, für beliebiges P.

Lemma *durch-sum*:
  fuer *a*::*nat* **und** *n*::*nat*
  zeigt $\forall x.\ a\ \mathit{teilt}\ A\ x \Longrightarrow a\ \mathit{teilt}\ (\sum x{<}n.\ A\ x * D\ x)$
Beweis (*Induktion n*)
  Fall *0* **zeige** *?Fall* **durch** *Vereinfachung*
fertig
  Fall (*Suc n*)
  wegen *Suc*
  gilt $a\ \mathit{teilt}\ (A\ n * D\ n)$ **durch** (*Vereinfachung mit*: *teilt-mult2*)
  samt *Suc*
  gilt $a\ \mathit{teilt}\ ((\sum x{<}n.\ A\ x * D\ x) + (A\ n * D\ n))$ **durch** (*Vereinfachung mit*: *teilt-add*)
  dann zeige *?Fall* **durch** *Vereinfachung*
wzbw

2.2.2 Verallgemeinertes Drei-Teilt

In diesem Abschnitt wird eine verallgemeinerte Form des Drei-Teilt-Problems gelöst. Wir zeigen dass der Satz für jede Zahlenfolge gilt. Im nächsten Abschnitt wenden wir diesen Satz dann auf den Spezialfall der Dezimaldarstellung an.

Here zeigen wir dass die erste Aussage des formlosen Beweises für alle natürlichen Zahlen gilt. Beachte dass wir $D\ i$ benutzen, um das i-te Element einer Zahlenfolge zu bezeichnen.

Lemma *ziffern-differenz-aufteilung*:
  fuer *n*::*nat* **und** *nd*::*nat* **und** *x*::*nat*
  zeigt $n = (\sum x{\in}\{..{<}nd\}.\ (D\ x)*((10::nat)\hat{\ }x)) \Longrightarrow$
    $(n - (\sum x{<}nd.\ (D\ x))) = (\sum x{<}nd.\ (D\ x)*(10\hat{\ }x - 1))$
durch (*Vereinfachung mit*: *summe-differenz-distributiv summe-multiplikation-distributiv2*)

Nun zeigen wir, dass Zahlen der Form $10^x - 1$ stets von 3 geteilt werden

Lemma *drei-teilt-0*:
  zeigt $(3::nat)\ \mathit{teilt}\ (10\hat{\ }x - 1)$
Beweis (*Induktion x*)

Fall *0* **zeige** *?Fall* **durch** *Vereinfachung*
fertig
Fall (*Suc n*)
sei *?drei* = (*3::nat*)
gilt *?drei teilt 9* **durch** *Vereinfachung*
darueberhinaus
gilt *?drei teilt* (*10*∗(*10*ˆ*n* − *1*)) **durch** (*Regel teilt-mult*) (*Regel Suc*)
dann gilt *?drei teilt* (*10*ˆ(*n*+*1*) − *10*) **durch** (*Vereinfachung mit*: *nat-distrib*)
letztendlich
gilt *?drei teilt* ((*10*ˆ(*n*+*1*) − *10*) + *9*)
durch (*Vereinfachung nur mit*: *ac-simps*) (*Regel teilt-add*)
dann zeige *?Fall* **durch** *Vereinfachung*
wzbw

Das vorherige Lemma und Lemma *durch-sum* wird ausgeführt.

Lemma *drei-teilt-1*:
fuer *D* :: *nat* ⇒ *nat*
zeigt *3 teilt* ($\sum$ *x*<*nd*. *D x* ∗ (*10*ˆ*x* − *1*))
durch (*subst mult.commute*, *rule durch-sum*) (*Vereinfachung mit*: *drei-teilt-0* [*simplified*])

Mit dem Lemmata *ziffern-differenz-aufteilung* und *drei-teilt-1* zeigen wir das folgende Lemma:

Lemma *drei-teilt-2*:
fuer *nd*::*nat* **und** *D*::*nat*⇒*nat*
zeigt *3 teilt* (($\sum$ *x*<*nd*. (*D x*)∗(*10*ˆ*x*)) − ($\sum$ *x*<*nd*. (*D x*)))
Beweis−
wegen *drei-teilt-1* **gilt** *3 teilt* ($\sum$ *x*<*nd*. *D x* ∗ (*10* ˆ *x* − *1*)) **.**
dann zeige *?These* **durch** (*Vereinfachung nur mit*: *ziffern-differenz-aufteilung*)
wzbw

Nun können wir den Hauptsatz dieses Abschnittes präsentieren. Für jede Zahlenfolge (gegen durch eine Funktion D) zeigen wir dass drei die Expansionssumme $\sum(D\ x) * 10^x$ over x genau dann teilt, wenn drei die Summe der Zahlen $\sum D\ x$ teilt.

Lemma *drei-teilt-allgemein*:
fuer *D* :: *nat* ⇒ *nat*
zeigt (*3 teilt* ($\sum$ *x*<*nd*. *D x* ∗ *10*ˆ*x*)) = (*3 teilt* ($\sum$ *x*<*nd*. *D x*))
Beweis
gilt *mono*: ($\sum$ *x*<*nd*. *D x*) ≤ ($\sum$ *x*<*nd*. *D x* ∗ *10*ˆ*x*)
durch (*Regel setsum-mono*) *Vereinfachung*

Damit können wir den Ausdruck ($\sum$ *x*<*nd*. *D x* ∗ 10^x) − *setsum D* {..<*nd*} formen.

{
nimm *3 teilt* ($\sum$ *x*<*nd*. *D x*) **an**
samt *drei-teilt-2 mono*
zeige *3 teilt* ($\sum$ *x*<*nd*. *D x* ∗ *10*ˆ*x*)

durch (*Explosion intro*: *teilt-diffD*)
}
{
nimm *3 teilt* ($\sum x<nd.\ D\ x * 10\hat{}x$) **an**
samt *drei-teilt-2 mono*
zeige *3 teilt* ($\sum x<nd.\ D\ x$)
durch (*Explosion intro*: *teilt-diffD1*)
}
wzbw

2.2.3 Drei-Teilt, natürlich

Dieser Abschnitt zeigt dss wir für alle natürlichen Zahlen eine Zahlenfolge von Ziffern kleiner 10 angeben können, die der Dezimalentwicklung der Zahl entspricht. Wir können darauf unser Lemma *drei-teilt-allgemein* anwenden, um unseren Hauptsatz zu zeigen.

Definition von Länge und Quersumme.

Dieser Abschnitt für ein paar Funktionen ein, um die nötigen Eigenschaften natürlicher Zahlen zu berechnen. Danach beweisen wir ein paar Eigenschaften dieser Funktionen.

Die Funktion *nlaenge* gibt die Anzal der Ziffern einer natürlichen Zahl n an.

Funktion *nlaenge* :: *nat* ⇒ *nat*
wobei
nlaenge 0 = *0*
| *nlaenge x* = *1* + *nlaenge* (*x durch 10*)

Die Funktion *quersumme* berechnet die Summe der Ziffern einer Zahl n.

definition
quersumme :: *nat* ⇒ *nat* **wobei**
quersumme n = ($\sum x$ < *nlaenge n. n durch 10ˆx rest 10*)

Einige Eigenschaften dieser Funktionen:.

Lemma *nlaenge-null*:
0 = *nlaenge x* ⟹ *x* = *0*
durch (*Induktion x rule*: *nlaenge.induct*) *Automatismen*

Lemma *nlaenge-Nachfolger*:
Nachfolger m = *nlaenge n* ⟹ *m* = *nlaenge* (*n durch 10*)
durch (*Induktion n rule*: *nlaenge.induct*) *Vereinfachung-ueberall*

Das folgende ist das Hauptlemma, das wir brauchen, um unseren Satz zu beweisen. Es besagt dass eine Entwicklung einer natürlichen Zahl n in eine Ziffernfolge immer möglich ist.

Lemma *entwicklung-existiert*:

$m = (\sum x{<}nlaenge\ m.\ (m\ durch\ (10{::}nat)\hat{\ }x\ rest\ 10) * 10\hat{\ }x)$
Beweis (*Induktion nlaenge m beliebig*: *m*)
Fall *0* **dann zeige** *?Fall* **durch** (*Vereinfachung mit*: *nlaenge-null*)
fertig
Fall (*Suc nd*)
erhalte *c* **wobei** *ment*: $m = 10*(m\ durch\ 10) + c \wedge c < 10$
und *cdef*: $c = m\ rest\ 10$ **durch** *Vereinfachung*
zeige $m = (\sum x{<}nlaenge\ m.\ m\ durch\ 10\hat{\ }x\ rest\ 10 * 10\hat{\ }x)$
Beweis –
wegen ‹*Nachfolger nd = nlaenge m*›
gilt $nd = nlaenge\ (m\ durch\ 10)$ **durch** (*rule nlaenge-Nachfolger*)
samt *Suc* **gilt**
$m\ durch\ 10 = (\sum x{<}nd.\ m\ durch\ 10\ durch\ 10\hat{\ }x\ rest\ 10 * 10\hat{\ }x)$ **durch** *Vereinfachung*
samt *ment* **gilt**
$m = 10*(\sum x{<}nd.\ m\ durch\ 10\ durch\ 10\hat{\ }x\ rest\ 10 * 10\hat{\ }x) + c$ **durch** *Vereinfachung*
weiter gilt
$\ldots = (\sum x{<}nd.\ m\ durch\ 10\ durch\ 10\hat{\ }x\ rest\ 10 * 10\hat{\ }(x{+}1)) + c$
durch (*ersetze mengensumme-rechts-distributiv*) (*Vereinfachung mit*: *ac-simps*)
weiter gilt
$\ldots = (\sum x{<}nd.\ m\ durch\ 10\hat{\ }(Nachfolger\ x)\ rest\ 10 * 10\hat{\ }(Nachfolger\ x)) + c$
durch (*Vereinfachung mit*: *durch-mult2-gleich*[*symmetric*])
weiter gilt
$\ldots = (\sum x{\in}\{Nachfolger\ 0..{<}Nachfolger\ nd\}.\ m\ durch\ 10\hat{\ }x\ \ rest\ 10 * 10\hat{\ }x) + c$
durch (*Vereinfachung nur mit*: *mengensumme-verschiebe-grenzen-Nachfolger*)
(*Vereinfachung mit*: *mindestens-null-kleiner-als*)
weiter gilt
$\ldots = (\sum x{<}Nachfolger\ nd.\ m\ durch\ 10\hat{\ }x\ rest\ 10 * 10\hat{\ }x)$
durch (*Vereinfachung mit*: *mindestens-null-kleiner-als*[*symmetric*] *mengensumme-anfang-bis-nachfolger cdef*)
weiter note ‹*Nachfolger nd = nlaenge m*›
zusammengefasst
zeige $m = (\sum x{<}nlaenge\ m.\ m\ durch\ 10\hat{\ }x\ rest\ 10 * 10\hat{\ }x)$ **.**
wzbw
wzbw

Hauptsatz

Wir können nun das allgemeine Lemma *drei-teilt-allgemein* und die Existenzaussage von *entwicklung-existiert* verwenden, um unseren Hauptsatz zu zeigen.

Satz *drei-teilt-nat*:
zeigt $(3\ teilt\ n) = (3\ teilt\ quersumme\ n)$
Beweis (*unfold quersumme-def*)
gilt $n = (\sum x{<}nlaenge\ n.\ (n\ durch\ (10{::}nat)\hat{\ }x\ rest\ 10) * 10\hat{\ }x)$
durch (*rule entwicklung-existiert*)
darueberhinaus

gilt *3 teilt* ($\sum x$<*nlaenge n.* (*n durch* (*10::nat*) ^*x rest 10*) $*$ *10*^*x*) =
(*3 teilt* ($\sum x$<*nlaenge n. n durch 10*^*x rest 10*))
durch (*rule drei-teilt-allgemein*)
letztendlich
zeige *3 teilt n* = (*3 teilt* ($\sum x$<*nlaenge n. n durch 10*^*x rest 10*)) **durch** *Vereinfachung*
wzbw

Ende